



الرياضيات

الصف الثاني عشر - الفرع الأدبي

الفصل الدراسي الأول

12

كتاب التمارين





الرياضيات

الصف الثاني عشر- الفرع الأدبي

الفصل الدراسي الأول

12

فريق التأليف

د. عمر محمد أبوغليون (رئيسًا)

هبه ماهر التميمي　　إبراهيم عقله القادري　　ايمن ناصر صندوقه

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237　　06-5376266　　P.O.Box: 2088 Amman 11941



@nccdjor　　feedback@nccd.gov.jo　　www.nccd.gov.jo

قـرّرت وزارة التربيـة والتعليـم تدريـس هذا الكتـاب في مدارس المملكـة الأردنية الهاشـمية جميعها، بنـاءً على قـرار المجلس الأعلى للمركـز الوطنـي لتطويـر المناهج في جلسـته رقـم (2022/3)، تاريـخ 2022/5/12 م، وقرار مجلس التربيـة والتعليم رقـم (2022/18) تاريـخ 2022/5/29 م بـدءًا مـن العام الـدراسي 2022 / 2023 م.

- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan
- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

ISBN: 978 - 9923 - 41 - 337 - 1

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(2022/4/2015)

375.001

الأردن. المركز الوطني لتطوير المناهج

الرياضيـات: الصـف الثانـي عشـر: الفـرع الأدبـي: كتـاب التماريـن (الفصـل الدراسـي الأول)/ المركـز الوطنـي لتطويـر المناهـج.- عمـان: المركـز، 2022

(24) ص.

ر.إ.: 2022/4/2015

الواصفات:/ تطوير المناهج/ / المقررات الدراسية/ / مستويات التعليم/ / المناهج/

يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه ولا يعبّر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.

British Library Cataloguing -in- Publication Data
A catalogue record for this publication is available from the Library.

الطبعة الأولى (التجريبية)

1443 هـ / 2022 م

أعزّاءنا الطلبة ...

يحتوي هذا الكتاب على تمارين مُتنوِّعة أُعِدَّت بعناية لتغنيكم عن استعمال مراجع إضافية، وهي تُعَدُّ استكمالًا للتمارين الواردة في كتاب الطالب، وتهدف إلى مساعدتكم على ترسيخ المفاهيم التي تتعلَّمونها في كل درس، وتُنمّي مهاراتكم الحسابية.

قد يختار المُعلِّم/ المُعلِّمة بعض تمارين هذا الكتاب واجبًا منزليًّا، ويترك لكم بعضها الآخر لكي تحلّوها عند الاستعداد للاختبارات الشهرية واختبارات نهاية الفصل الدراسي.

أمّا الصفحات التي تحمل عنوان (أستعد لدراسة الوحدة) في بداية كل وحدة، فإنَّها تساعدكم على مراجعة المفاهيم التي درستموها سابقًا؛ ما يُعزِّز قدرتكم على متابعة التعلُّم في الوحدة الجديدة بسلاسة ويسر.

قد لا يتوافر فراغ كافٍ إزاء كل تمرين لكتابة خطوات الحلِّ جميعها؛ لذا يُمكِن استعمال دفتر إضافي لكتابتها بوضوح.

متمنين لكم تعلُّمًا ممتعًا ومُيسَّرًا.

المركز الوطني لتطوير المناهج

قائمة المحتويات

الوحدة 1 الاقترانات الأُسِّية واللوغاريتمية

الوحدة 2 التفاضل

قائمة المحتويات

الوحدة 3 تطبيقات التفاضل

الوحدة 1: الاقترانات الأُسِّية واللوغاريتمية

أختبر معلوماتي قبل البَدْء بدراسة الوحدة، وفي حال عدم تأكُّدي من الإجابة أستعين بالمثال المعطى.

تبسيط المقادير الأُسِّية

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي في أبسط صورة:

1) $(16)^{\frac{3}{4}}$

2) $\sqrt[3]{64a^6}$

3) $\frac{20a^5b^2}{12ab^{-3}}$

مثال: أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي في أبسط صورة:

1) $(-125)^{\frac{2}{3}}$

$(-125)^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{-125})^2$ الصورة الأُسِّية للجذر

$= (-5)^2$ $\sqrt[3]{-125} = -5$

$= 25$ الناتج

2) $\sqrt{36x^4y^8}$

$\sqrt{36x^4y^8} = \sqrt{36}\sqrt{x^4}\sqrt{y^8}$ خصائص الجذور

$= \sqrt{36}\, x^{\frac{4}{2}}\, y^{\frac{8}{2}}$ الصورة الأُسِّية للجذر

$= 6x^2y^4$ بالتبسيط

حَلُّ المعادلات الأُسِّية

أحُلُّ كُلًّا من المعادلات الأُسِّية الآتية:

4) $3^{x+1} = 27$

5) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 625$

6) $4^{-x} = \frac{1}{256}$

مثال: أحُلُّ المعادلة الأُسِّية: $2 \times 4^x = 128$

$2 \times 4^x = 128$ المعادلة الأصلية

$4^x = 64$ بقسمة طرفي المعادلة على 2

$4^x = 4^3$ $64 = 4^3$

$x = 3$ بمساواة الأُسس

إيجاد الاقتران العكسي

أجد الاقتران العكسي لكل اقتران ممّا يأتي:

7) $f(x) = x + 3$

8) $f(x) = \frac{x}{4} + 1$

9) $f(x) = 2x^3$

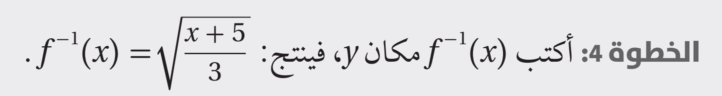
مثال: أجد الاقتران العكسي للاقتران: **$f(x) = 3x^2 - 5, x \geq 0$**.

باستعمال اختبار الخط الأفقي، أجد أنَّ $f(x)$ هو اقتران واحد لواحد عندما $x \geq 0$؛ ما يعني أنَّ له اقترانًا عكسيًّا.

الخطوة 1: أكتب الاقتران في صورة: $y = 3x^2 - 5$.

الخطوة 2: أُعيد ترتيب المعادلة الناتجة في الخطوة 1 بجعل المعادلة بدلالة x.

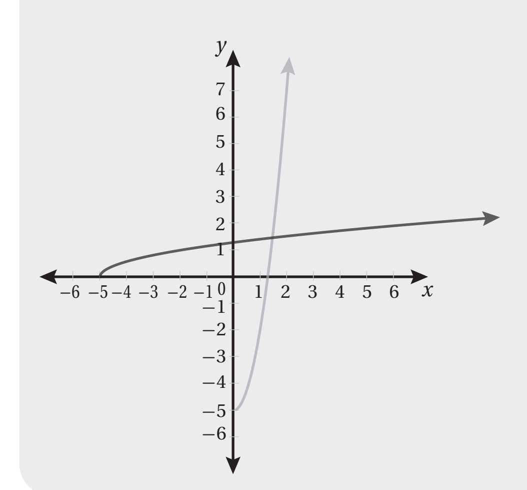
المعادلة الأصلية	$y = 3x^2 - 5$
بإضافة 5 إلى طرفي المعادلة	$y + 5 = 3x^2$
بقسمة طرفي المعادلة على 3	$\frac{y+5}{3} = x^2$
بأخذ الجذر التربيعي الموجب للطرفين؛ لأنَّ مجال f الذي يُمثِّل مدى f^{-1} هو الأعداد غير السالبة	$\sqrt{\frac{y+5}{3}} = x$



الخطوة 3: أُبدِّل x بـ y، ثم أُبدِّل y بـ x، فينتج: $y = \sqrt{\frac{x+5}{3}}$.

الخطوة 4: أكتب $f^{-1}(x)$ مكان y، فينتج: $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x+5}{3}}$.

عند تمثيل كلٍّ من $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ على المستوى الإحداثي نفسه، أُلاحِظ أنَّ التمثيل البياني للاقتران $f^{-1}(x)$ هو انعكاس للتمثيل البياني للاقتران $f(x)$ حول المستقيم $y = x$.



الاقترانات الأُسِّية
Exponential Functions

أجد قيمة كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

1 $f(x) = (13)^x, x = 2$

2 $f(x) = 4(5)^x, x = 3$

3 $f(x) = 7\left(\frac{1}{2}\right)^x, x = 3$

4 $f(x) = -(3)^x + 7, x = 4$

5 $f(x) = -(2)^x + 1, x = 6$

6 $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 12, x = 3$

أُمثِّل كل اقتران ممّا يأتي بيانيًّا، ثم أُحدِّد مجاله ومداه:

7 $f(x) = 7(6)^x$

8 $f(x) = 7^{-x}$

9 $f(x) = 5\left(\frac{1}{8}\right)^x$

10 $f(x) = 2(9)^x$

أجد خط التقارب الأفقي لكل اقتران ممّا يأتي، ثم أُحدِّد مجاله ومداه، مُبيِّنًا إذا كان مُتناقِصًا أم مُتزايِدًا:

11 $f(x) = 7^{x-2} + 1$

12 $f(x) = \left(\frac{1}{7}\right)^{x+1} - 3$

13 $f(x) = 5\left(\frac{1}{4}\right)^{x+3} - 7$

14 $f(x) = 7(4)^{x-5} + 3$

بكتيريا: يُمثِّل الاقتران: $f(x) = 400(2)^{\frac{x}{3}}$ عدد الخلايا البكتيرية بعد x ساعة في تجربة مخبرية:

15 أجد عدد الخلايا البكتيرية عند بَدْء التجربة.

16 أجد عدد الخلايا البكتيرية بعد 12 ساعة.

17 بعد كم ساعةً يصبح عدد الخلايا البكتيرية 102400 خلية؟

خزّان: يُمثِّل الاقتران: $f(x) = 2(0.75)^x$ كمِّية الماء المُتبقِّية في خزّان (بالمتر المُكعَّب) بعد x ساعة نتيجة ثقب فيه:

18 أجد كمِّية الماء المُتبقِّية في الخزّان بعد ساعة واحدة.

19 ما الزمن الذي تصبح فيه كمِّية الماء المُتبقِّية في الخزّان $\frac{9}{8}$ m^3 تقريبًا؟

النمو والاضمحلال الأُسِّي
Exponential Growth and Decay

استخدم 35 ألف شخص موقعًا إلكترونيًّا تعليميًّا هذه السنة، ومن المُتوقَّع أنْ يزداد هذا العدد بنسبة 2% كل سنة:

1. أكتب اقتران النمو الأُسِّي الذي يُمثِّل عدد مستخدمي الموقع بعد t سنة.
2. أجد عدد مستخدمي الموقع بعد 7 سنوات.

تلوُّث: في دراسة علمية تناولت درجة تأثير التلوُّث في عدد الأسماك التي تعيش في إحدى البحيرات، توصَّل الباحثون إلى أنَّ عدد الأسماك في البحيرة يقلُّ بنسبة 20% كل سنة:

3. أكتب اقتران الاضمحلال الأُسِّي الذي يُمثِّل عدد الأسماك في البحيرة بعد t سنة، علمًا بأنَّ عددها عند بَدْء الدراسة هو 12000 سمكة.
4. أجد عدد الأسماك في البحيرة بعد 3 سنوات.

بلغ عدد سكّان لواء المُوقَّر (شرق العاصمة عمّان) 84370 نسمة تقريبًا سنة 2015م. إذا كانت نسبة النمو السكّاني في اللواء 2.4% سنويًّا، فأُجيب عن السؤالين الآتيين:

5. أكتب اقتران النمو الأُسِّي الذي يُمثِّل عدد سكّان اللواء بعد t سنة.
6. أجد العدد التقريبي لسكّان اللواء سنة 2030م.

سيّارة: يتناقص ثمن سيّارة سعرها JD 19725 بنسبة 3% سنويًّا:

7. أكتب اقتران الاضمحلال الأُسِّي لثمن السيّارة بعد t سنة.
8. أجد ثمن السيّارة بعد 4 سنوات.

استثمر عامر مبلغ JD 8000 في شركة صناعية، بنسبة ربح مُركَّب تبلغ 5.5%، وتضاف كل شهر:

9. أكتب صيغة تُمثِّل جُمْلة المبلغ بعد t سنة.
10. أجد جُمْلة المبلغ بعد 3 سنوات.

11. أودعت ليلى مبلغ JD 60000 في حساب بنكي، بنسبة ربح مُركَّب مستمر مقدارها 6%. أجد جُمْلة المبلغ بعد 17 سنة.

الاقترانات اللوغاريتمية
Logarithmic Functions

أكتب كل معادلة لوغاريتمية ممّا يأتي في صورة أُسِّية:

1 $\log_3 729 = 6$
2 $\log_5 625 = 4$
3 $\log_{64} 4 = \frac{1}{3}$
4 $\log_{64} 8 = 0.5$
5 $\log_7 1 = 0$
6 $\log_{43} 43 = 1$

أكتب كل معادلة أُسِّية ممّا يأتي في صورة لوغاريتمية:

7 $4^5 = 1024$
8 $3^{-4} = \frac{1}{81}$
9 $7^3 = 343$
10 $5^{-2} = 0.04$
11 $(32)^1 = 32$
12 $8^0 = 1$

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

13 $\log_2 64$
14 $\log_{81} 9$
15 $\log_2 32$
16 $\log_{25} 125$
17 $\log_{10} 0.0001$
18 $\log_{\frac{5}{3}} 1$
19 $\log_{\frac{1}{6}} 6$
20 $(10)^{\log_{10} \frac{1}{9}}$
21 $\log_3 \frac{1}{\sqrt{(3)^6}}$
22 $\log_b \sqrt[7]{b}$
23 $\log_{10} (1 \times 10^{-5})$
24 $4^{\log_4 3}$

أُمثِّل كل اقتران ممّا يأتي بيانيًّا، ثم أُحدِّد مجاله ومداه ومقطعيه من المحورين الإحداثيين وخطوط تقاربه، مُبيِّنًا إذا كان مُتناقِصًا أم مُتزايِدًا:

25 $f(x) = \log_8 x$
26 $g(x) = \log_{\frac{1}{10}} x$
27 $h(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$
28 $r(x) = \log_{\frac{1}{9}} x$
29 $f(x) = \log_9 x$
30 $g(x) = \log_{11} x$

أجد مجال كل اقتران لوغاريتمي ممّا يأتي:

31 $f(x) = \log_2 (x + 3)$
32 $f(x) = 7 + 2\log_5 (x - 2)$
33 $f(x) = -5\log_7 (-x)$

34 **ضوء:** تُمثِّل المعادلة: $\log_{10}\left(\frac{I}{12}\right) = -0.0125x$ العلاقة بين شِدَّة الضوء I بوحدة lumen والعمق x بالأمتار في إحدى البحيرات. كم تبلغ شِدَّة الضوء عند عمق 10 m؟

الدرس 4

قوانين اللوغاريتمات
Laws of Logarithms

إذا كان: $\log_a 7 \approx 0.936$، وكان: $\log_a 3 \approx 0.528$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1. $\log_a \frac{3}{7}$
2. $\log_a 21$
3. $\frac{\log_a 3}{\log_a 7}$
4. $\log_a \frac{1}{7}$
5. $\log_a 441$
6. $\log_a \frac{49}{27}$
7. $\log_a (7a^2)$
8. $\log_a \sqrt[4]{81}$
9. $(\log_a 3)(\log_a 7)$

أكتب كل مقدار لوغاريتمي ممّا يأتي بالصورة المُطوَّلة، علمًا بأنَّ المُتغيِّرات جميعها تُمثِّل أعدادًا حقيقيةً موجبةً:

10. $\log_a x^7$
11. $\log_a \left(\frac{ac}{b}\right)$
12. $\log_a (\sqrt{x})$
13. $\log_a \left(\frac{\sqrt{xy}}{z}\right)$
14. $\log_a \frac{1}{x^3 y^4}$
15. $\log_a \sqrt[7]{128x^7}$
16. $\log_a \frac{(x^{-1}y^2)^4}{(x^5y^{-2})^3}$
17. $\log_a \sqrt{\frac{x^2y^3}{z^3}}$
18. $\log_a (x-y+z)^9,\ y-x<z$

أكتب كل مقدار لوغاريتمي ممّا يأتي بالصورة المُختصَرة، علمًا بأنَّ المُتغيِّرات جميعها تُمثِّل أعدادًا حقيقيةً موجبةً:

19. $\log_a x - \log_a y$
20. $\log_b (b-1) + 2\log_b b,\ b>1$
21. $\log_a \sqrt{x} - \log_a \frac{1}{\sqrt{x}}$
22. $\log_a (x^2-25) - \log_a (x+5),\ x>5$
23. $3\log_b 1 - \log_b b$
24. $8\log_b x + 4\log_b y - \frac{1}{2}\log_b z$

25. **إيـرادات:** يُمثِّل الاقتران: $T(a) = 10 + 20\log_6 (a+1)$ مبيعات شـركة (بآلاف الدنانيـر) من مُنتَج جديد، حيث a المبلغ (بآلاف الدنانير) الذي تُنفِقه الشـركة على إعلانات المُنتَج، و $a \geq 0$. وتعنـي القيمة: $T(1) \approx 17.7$ أنَّ إنفاق JD 1000 على الإعلانات يُحقِّق إيرادات قيمتها JD 17700 من بيع المُنتَج. أجد قيمة إيرادات الشـركة بعد إنفاقها مبلغ 11 ألف دينار على الإعلانات، علمًا بأنَّ $\log_6 2 \approx 0.3869$.

المعادلات الأُسِّية
Exponential Equations

أستعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كلٍّ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة:

1 $\log 17$

2 $\log(1.5 \times 10^{-4})$

3 $\ln 2.3$

4 $\log_2 15$

5 $\log_5 e^7$

6 $\ln 7$

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب جزء من مئة (إنْ لزم):

7 $\log_5 27$

8 $\log_{\frac{1}{4}} 19$

9 $\log_7 8$

10 $\log_8 \frac{1}{8}$

11 $\log 10000$

12 $\log_3 18$

أحُلُّ المعادلات الأُسِّية الآتية، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب 4 منازل عشرية:

13 $5^x = 120$

14 $-4e^{4x} = -64$

15 $3^{2x+1} = 7^{5x}$

16 $64^x + 2(8^x) - 3 = 0$

17 $7(4)^x = 49$

18 $21^{x-1} = 3^{7x+1}$

19 **حرارة:** تُمثِّل المعادلة: $T = 27 + 219e^{-0.032t}$ درجة حرارة معدن (بالسليسيوس °C) بعد t دقيقة من بَدْء تبريده. متى تصبح درجة حرارة المعدن 100°C؟

أرانب: توصَّلت دراسة إلى أنَّ عدد الأرانب في محمية طبيعية يتزايد وَفق الاقتران: $N(t) = \frac{2000}{1+3e^{-0.05t}}$، حيث N عدد الأرانب في المحمية بعد t سنة:

20 أجد عدد الأرانب في المحمية عند بَدْء الدراسة.

21 بعد كم سنةً يصبح عدد الأرانب في المحمية 700 أرنب؟

أسماك: يُمثِّل الاقتران: $P(t) = 200e^t$ عدد أسماك السلمون P في نهر بعد t سنة من بَدْء دراسة مُعيَّنة عليها:

22 أجد عدد أسماك السلمون في النهر عند بَدْء الدراسة.

23 بعد كم سنةً يصبح عدد أسماك السلمون في النهر 4000 سمكة؟

الوحدة 2: التفاضل

أختبر معلوماتي قبل البَدْء بدراسة الوحدة، وفي حال عدم تأكُّدي من الإجابة أستعين بالمثال المعطى.

كتابة المقدار الجبري في أبسط صورة

أجد ناتج ضرب كلٍّ ممّا يأتي في أبسط صورة:

1) $2x(x-4)$ 2) $(x+4)(x-5)$ 3) $(3x+1)^2$

مثال: أجد ناتج ضرب $(2x+1)(5x-2)$.

$$(2x+3)(5x-2)$$

أفصل المقدار $2x+3$ إلى حدَّين، ثم أضرب كُلًّا منهما في المقدار $5x-2$

$$(2x+3)(5x-2) = 2x\,(5x-2) + 3(5x-2)$$

أستعمل خاصية التوزيع

$$= (10x^2 - 4x) + (15x - 6)$$

أجمع الحدود المتشابهة

$$= 10x^2 - 4x + 15x - 6$$

أكتب المقدار في أبسط صورة

$$= 10x^2 + 11x - 6$$

التحويل من الصيغة الجذرية إلى الصيغة الأُسِّية

أُحوِّل كُلًّا ممّا يأتي من الصيغة الجذرية إلى الصيغة الأُسِّية:

4) $\sqrt[5]{x^4}$ 5)  $\sqrt[3]{x}$ 6) $\sqrt{x-1}$ 7) $\dfrac{5}{\sqrt[7]{x^4}}$

مثال: أُحوِّل كُلًّا ممّا يأتي من الصيغة الجذرية إلى الصيغة الأُسِّية:

1) $\sqrt[6]{x^7}$

تعريف الأُسِّ النسبي

$$\sqrt[6]{x7} = x^{\frac{7}{6}}$$

2) $\dfrac{3}{\sqrt[7]{x-2}}$

تعريف الأُسِّ النسبي

$$\frac{3}{\sqrt[7]{x-2}} = \frac{3}{(x-2)^{\frac{1}{7}}}$$

الأُسُّ السالب

$$= 3(x-2)^{\frac{-1}{7}}$$

مشتقة اقتران القوَّة

أجد مشتقة كلٍّ ممّا يأتي:

8 $f(x) = 7x^3$

9 $f(x) = 12x^{\frac{4}{3}}$

10 $f(x) = 3x^2 - 5\sqrt{x}$

11 $f(x) = -\frac{3}{x^7}$

12 $f(x) = x^2(x^3 - 2x)$

13 $y = \frac{7}{x^3} + \frac{3}{x} - 2$

مثال: أجد مشتقة كلٍّ ممّا يأتي:

a) $f(x) = \frac{2x - 7}{x^2}$

$f(x) = \frac{2x - 7}{x^2} = \frac{2x}{x^2} - \frac{7}{x^2}$ بقسمة كل حدٍّ في البسط على x^2

$= 2x^{-1} - 7x^{-2}$ بكتابة الاقتران في صورة أُسّية

$f'(x) = -2x^{-2} + 14x^{-3}$ قاعدتا مشتقة مضاعفات القوَّة، ومشتقة الفرق

$= -\frac{2}{x^2} + \frac{14}{x^3}$ تعريف الأُسِّ السالب

b) $f(x) = \sqrt{x} + 6\sqrt{x^3} + 5$

$f(x) = x^{\frac{1}{2}} + 6x^{\frac{3}{2}} + 5$ بكتابة الاقتران في صورة أُسّية

$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 9x^{\frac{1}{2}}$ قواعد مشتقة مضاعفات القوَّة، ومشتقة المجموع، ومشتقة الثابت

$= \frac{1}{2\sqrt{x}} + 9\sqrt{x}$ الصورة الجذرية

الدرس 1

قاعدة السلسلة
The Chain Rule

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x)=\sqrt{4x-1}$

2 $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{3-x^2}}$

3 $f(x)=(3+4x)^{\frac{5}{2}}$

4 $f(x)=(8-x)^{100}$

5 $f(x)=x^2+(200-x)^2$

6 $f(x)=(x+5)^7+(2x+3)^6$

7 $f(x)=\sqrt[3]{x^5+6x}$

8 $f(x)=\dfrac{1}{(x^2-3)^3}$

9 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\sqrt{16-x^2}$

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

10 $f(x)=4x^3+(x-2)^4\ ,\ x=2$

11 $f(x)=\sqrt{x^2+8x}\ ,\ x=8$

أستعمل قاعدة السلسلة في إيجاد $\dfrac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

12 $y=u^3-7u^2\ ,\ u=x^2+3$

13 $y=\sqrt{7-3u}\ ,\ u=x^2-9$

أستعمل قاعدة السلسلة في إيجاد $\dfrac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

14 $f(x)=u^3-5(u^3-7u)^2\ ,\ u=\sqrt{x}\ ,\ x=4$

15 $f(x)=2u^3+3u^2\ ,\ u=x+\sqrt{x}\ ,\ x=1$

تلوُّث: توصَّلت دراسة بيئية إلى نمذجة مقدار التلوُّث في إحدى البحيرات باستعمال الاقتران: $P(t)=(t^{\frac{1}{4}}+3)^3$، حيث t الزمن بالسنوات، علمًا بأنَّ P يقاس بأجزاء من المليون:

16 أجد مُعدَّل تغيُّر مقدار التلوُّث في البحيرة بالنسبة إلى الزمن t.

17 أجد مُعدَّل تغيُّر مقدار التلوُّث في البحيرة بعد 16 عامًا.

إذا كان: $g(-2)=8, g'(-2)=4, h(5)=-2, h'(5)=6$، فأجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي عندما $x=5$:

18 $f(x)=g(h(x))$

19 $f(x)=4(h(x))^2$

مشتقتا الضرب والقسمة
Product and Quotient Rules

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = 2x(1 + 3x^2)^3$

2) $f(x) = \dfrac{x - 2}{x + 2}$

3) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 1} + 4x^3$

4) $f(x) = (1 - x^2)^4 (2x + 6)^3$

5) $f(x) = \dfrac{3x + 5}{(x + 1)^2}$

6) $f(x) = (5x^2 + 4x - 3)(2x^2 - 3x + 1)$

7) $f(x) = (3x^5 - x^2)\left(x - \frac{5}{x}\right)$

8) $f(x) = \dfrac{5x^2 - 1}{2x^3 + 3}$

9) $f(x) = \dfrac{1}{x - 4}$

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

10) $f(x) = x^5 \sqrt{10x + 6}\, , x = 1$

11) $f(x) = \dfrac{x + 3}{\sqrt{x + 4}}, x = 12$

أستعمل قاعدة السلسلة في إيجاد $\dfrac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

12) $y = 5u^2 + 3u - 1, u = \dfrac{18}{x^2 + 5}, x = 2$

13) $y = \dfrac{1}{u + 1}, u = x^3 - 2x + 5, x = 0$

سـكّان: يُمثَّل عدد سكّان مدينة صغيرة بالاقتران: $P(t) = 20 - \dfrac{6}{t+1}$، حيث t الزمن بالسنوات منذ الآن، وP عدد السكّان بالآلاف:

14) أجد مُعدَّل نمو السكّان في المدينة بالنسبة إلى الزمن t.

15) أجد مُعدَّل نمو السكّان في المدينة عندما $t = 9$، مُفسِّرًا معنى الناتج.

16) **نباتات هجينة:** وجد فريق من الباحثين الزراعيين أنَّه يُمكِن التعبير عن ارتفاع نبتة مُهجَّنة من نبات تبّاع الشمس h (بالأمتار) باستعمال الاقتران: $h(t) = \dfrac{3t^2}{4 + t^2}$، حيث t الزمن بالأشهر بعد زراعة البذور. أجد مُعدَّل تغيُّر ارتفاع النبتة بالنسبة إلى الزمن t.

إذا كان: $f(0) = 5, f'(0) = -3, g(0) = -1, g'(0) = 2$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

17) $(fg)'(0)$

18) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(0)$

19) $(7f + 2fg)'(0)$

الدرس 3

مشتقتا الاقتران الأُسِّي الطبيعي والاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

Derivatives of Natural Exponential and Logarithmic Functions

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1. $f(x) = x^{10} e^x$
2. $f(x) = 3e^{2x-1}$
3. $f(x) = 3e^x - 2e^{4x}$
4. $f(x) = (9x - 1) e^{3x}$
5. $f(x) = \frac{e^{-2x}}{\sqrt{x+1}}$
6. $f(x) = \frac{(e^x + 2)^3}{x}$
7. $f(x) = e^{x^2+7}$
8. $f(x) = (2e^{3x} - 1)^2$
9. $f(x) = \sqrt{e^x + 1}$

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

10. $f(x) = \frac{\ln x}{x+2}$
11. $f(x) = \ln (x^2 + 1)$
12. $f(x) = e^x \ln x^2$
13. $f(x) = (3 + x) \ln x$
14. $f(x) = \ln \left(\frac{1}{x}\right)$
15. $f(x) = x^5 \ln (3x)$

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

16. $f(x) = x^2 e^{-1}, x = -1$
17. $f(x) = \ln (x^2 + 1), x = 3$

بكتيريا: يُمثِّل الاقتران: $N(t) = 1000\left(30 + e^{-\frac{t}{30}}\right)$ عدد الخلايا البكتيرية بعد t ساعة في مجتمع بكتيري:

18. أجد العدد الأوَّلي للخلايا البكتيرية في المجتمع.
19. أجد مُعدَّل تغيُّر عدد الخلايا البكتيرية بالنسبة إلى الزمن.
20. أجد مُعدَّل نمو المجتمع بعد 20 ساعة.

إعلانات: يُمكِن نمذجة درجة استجابة المستهلكين لمُنتَج ما عن طريق الإعلانات باستعمال الاقتران: $N(a) = 2000 + 500 \ln a, a \geq 1$ الذي يُمثِّل عدد الوحدات المَبيعة من المُنتَج، حيث a المبلغ الذي أُنفِق على الإعلانات بآلاف الدنانير:

21. أجد مُعدَّل تغيُّر عدد الوحدات المَبيعة بالنسبة إلى المبلغ a الذي أُنفِق على الإعلانات بآلاف الدنانير.
22. أجد مُعدَّل تغيُّر عدد الوحدات المَبيعة عندما $a = 10$.

الدرس 4

مشتقتا اقتران الجيب واقتران جيب التمام
Sine and Cosine Functions Derivatives

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = \sin^3 (5x - 1)$

2 $f(x) = \sin(x^3 - 2x + 4)$

3 $f(x) = 2 \cos (-4x)$

4 $f(x) = 3 \sin (3x + 7)$

5 $f(x) = 2x^3 \sin x - 3x \cos x$

6 $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$

7 $f(x) = \cos (\ln x)$

8 $f(x) = e^x (\cos x + \sin x)$

9 $f(x) = \cos (1-2x)^2$

10 $f(x) = 4\sqrt{\cos x + \sin x}$

11 $f(x) = (1 + \cos 2x)^3$

12 $f(x) = \sin^3 x \cos 4x$

13 $f(x) = \sin\left(\frac{e^x}{1 + e^x}\right)$

14 $f(x) = \frac{\cos x^2}{e^x}$

15 $f(x) = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$

16 $f(x) = \frac{x \sin x}{1 + x}$

17 $f(x) = \frac{x}{2 - \cos x}$

18 $f(x) = \ln(\cos x - \sin x)$

19 **حيوانات مُفترِسة:** يُمثِّل الاقتران: $D(t) = 500 + 200 \sin (0.4(t-2))$ عدد الحيوانات المُفترِسة في إحدى الغابات بعد t سنة من بَدْء دراسة لأحد الباحثين عليها. أجد مُعدَّل تغيُّر عدد الحيوانات المُفترِسة في الغابة بالنسبة إلى الزمن t.

20 **وقود:** يُمثِّل الاقتران: $C(t) = 30 + 21.6 \sin \left(\frac{2\pi t}{365} + 10.9\right)$ الاستهلاك اليومي من الوقود (باللترات) لإحدى السيّارات، حيث t الزمن بالأيام. أجد مُعدَّل تغيُّر استهلاك السيّارة للوقود بالنسبة إلى الزمن t.

21 **أكتشف الخطأ:** أكتشف الخطأ في الحَلِّ الآتي، ثم أُصحِّحه:

$$f(x) = \cos x \sin x$$
$$f'(x) = \cos x \cos x + \sin x (-\sin x)$$
$$= \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$= 1$$

الوحدة 3: تطبيقات التفاضل

أختبر معلوماتي قبل البَدْء بدراسة الوحدة، وفي حال عدم تأكُّدي من الإجابة أستعين بالمثال المعطى.

إيجاد ميل المنحنى

إذا كان الاقتران: $f(x) = 6 + x - x^3$، فأستعمل المشتقة لإيجاد كلٍّ ممّا يأتي:

1 ميل منحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطة $(1, 6)$.

2 قيمة x التي يكون عندها ميل منحنى الاقتران صفرًا.

مثال: إذا كان الاقتران: $f(x) = x^2 + x + 1$، فأستعمل المشتقة لإيجاد كلٍّ ممّا يأتي:

1) ميل منحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطة $(1, 3)$.

الاقتران المعطى	$f(x) = x^2 + x + 1$
باشتقاق الاقتران	$f'(x) = 2x + 1$
بتعويض $x = 1$	$f'(1) = 2(1) + 1$
بالتبسيط	$= 3$

إذن، ميل منحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطة $(1, 3)$ هو 3

2) قيمة x التي يكون عندها ميل منحنى الاقتران صفرًا.

بمساواة المشتقة بالصفر	$2x + 1 = 0$
بطرح 1 من طرفي المعادلة	$2x = -1$
بقسمة طرفي المعادلة على 2	$x = -\frac{1}{2}$

إذن، قيمة x التي يكون عندها ميل منحنى الاقتران صفرًا هي: $x = -\frac{1}{2}$.

إيجاد القِيَم الحرجة لاقتران ما

أجد القِيَم الحرجة لكل اقتران ممّا يأتي، ثم أُحدِّد نوعها باستعمال المشتقة الأولى:

5 $f(x) = x^3 - 16x$

4 $f(x) = x^2 - 9$

3 $f(x) = 2x^3 - 3x^2$

مثال: إذا كان الاقتران: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$، فأستعمل المشتقة لإيجاد كلٍّ ممّا يأتي:

1) القِيَم الحرجة للاقتران f.

الاقتران المعطى $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

باشتقاق الاقتران $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

بمساواة المشتقة بالصفر $3x^2 - 12x + 9 = 0$

بقسمة طرفي المعادلة على 3 $x^2 - 4x + 3 = 0$

بالتحليل إلى العوامل $(x - 3)(x - 1) = 0$

خاصية الضرب الصفري $x - 3 = 0$ or $x - 1 = 0$

بحَلِّ كل معادلة لـ x $x = 3$ or $x = 1$

إذن، القِيَم الحرجة للاقتران هي $x = 1$، و$x = 3$.

2) أُصنِّف النقاط الحرجة إلى عظمى محلية، وصغرى محلية.



	$x < 1$	$1 < x < 3$	$x > 3$
قِيَم الاختبار (x)	$x = 0$	$x = 2$	$x = 4$
إشارة $f'(x)$	$f'(0) > 0$	$f'(2) < 0$	$f'(4) > 0$
تزايد الاقتران وتناقصه	مُتزايِد ↗	مُتناقِص ↘	مُتزايِد ↗

إذن:

- توجد قيمة عظمى عندما $x = 1$؛ لأنَّ الاقتران مُتزايِد عن يسارها، ومُتناقِص عن يمينها.
- توجد قيمة صغرى عندما $x = 3$؛ لأنَّ الاقتران مُتناقِص عن يسارها، ومُتزايِد عن يمينها.

المماس والعمودي على المماس
The Tangent and Normal

أجد معادلة المماس لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

1. $f(x) = 2x^3 + 6x + 10, (-1, 2)$
2. $f(x) = \frac{e^x}{x+4}, \left(0, \frac{1}{4}\right)$
3. $f(x) = x^2 - \frac{7}{x^2}, (1, -6)$
4. $f(x) = x^2 - \frac{8}{\sqrt{x}}, (4, 12)$
5. $f(x) = 4\sqrt{x}, (9, 12)$
6. $f(x) = \sqrt{25 - x^2}, (3, 4)$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

7. $f(x) = \sqrt[3]{x}, x = 8$
8. $f(x) = \frac{4+x}{x-2}, x = 8$
9. $f(x) = \frac{8}{\sqrt{x+11}}, x = 5$

أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x، أو عند النقطة المعطاة:

10. $f(x) = 5x^3 + x^2 - 2, (-1, -6)$
11. $f(x) = 2x^2 (6-x), x = 5$

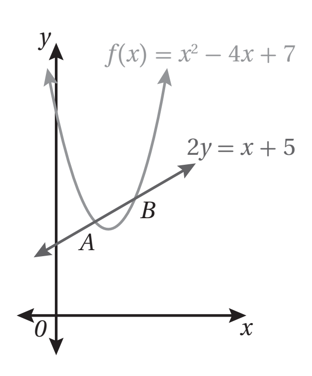
12. أجد إحداثيي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = 2x^6 - x^4 - 2$، التي يكون عندها المماس أفقيًّا.

13. أجد إحداثيي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = 20x^3 - 3x^5$، التي يكون عندها المماس أفقيًّا.

14. أجد إحداثيي النقطة الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - 10x$، التي يكون عندها ميل المماس 6.

15. إذا كان: $f(x) = kx^3 + h$، حيث k و h ثابتان، فأجد قيمة k التي تجعل المستقيم: $y = 2x + 5$ مماسًّا لمنحنى الاقتران $f(x)$ عندما $x = 1$.

يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - 4x + 7$، والمستقيم: $2y = x + 5$:



16. أجد إحداثيي كلٍّ من النقطة A والنقطة B.

17. أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند كلٍّ من النقطة A والنقطة B.

الدرس 2

المشتقة الثانية، والسرعة المتجهة، والتسارع

The Second Derivative, Velocity, and Acceleration

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = 5x^3 + 4x$

2 $f(x) = 5e^{4x}$

3 $f(x) = \sqrt[3]{x}$

4 $f(x) = 7 \ln x$

5 $f(x) = (x - 1)(2x + 3)$

6 $f(x) = e^x \sin x$

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

7 $f(x) = \frac{4}{\sqrt{3x - 2}}, x = 2$

8 $f(x) = 1 - 7x^2, x = -3$

9 إذا كان: $f(x) = ax^4 - 3x^2$، وكانت: $f''(2) = 42$، فأجد قيمة a.

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t - 7, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

10 ما سرعة الجسم المتجهة عندما $t = 1$؟

11 في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 1$؟

12 ما تسارع الجسم عندما $t = 1$؟

13 أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون.

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = (t - 3)^3, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

14 ما سرعة الجسم المتجهة عندما $t = 5$؟

15 في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 5$؟

16 ما تسارع الجسم عندما $t = 5$؟

17 أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون.

سيّارات سباق: **يُمكِن نمذجة موقع سيّارة سباق تتحرَّك في مسار مستقيم باستعمال الاقتران: $s(t) = 6t^2 - 2t$، حيث t الزمن بالثواني، و s الموقع بالأمتار:**

18 ما السرعة المتجهة للسيّارة بعد 5 ثوانٍ من بَدْء حركتها؟

19 ما تسارع السيّارة بعد 5 ثوانٍ من بَدْء حركتها؟

20 أجد قِيَم t التي تكون عندها السيّارة في حالة سكون.

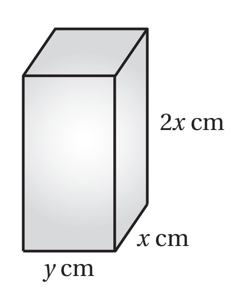
تطبيقات القِيَم القصوى
Optimization Problems

أستعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القِيَم القصوى المحلية (إنْ وُجِدت) لكل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$

2 $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$

3 $f(x) = x^3 (x-2)$



يُبيِّن الشكل المجاور قالبًا يُستعمَل لصنع لَبِنات البناء، وتبلغ مساحة سطحه الكلية 600 cm^2:

4 أجد الاقتران الذي يُمثِّل حجم القالَب بدلالة x.

5 أجد قيمة x التي تجعل حجم القالَب أكبر ما يُمكِن.

يُمثِّل الاقتران: $s(x) = 150 - 0.5x$ سعر البدلة الرجالية الذي حدَّدته شركة لإنتاج الملابس، حيث x عدد البدلات المَبيعة.
ويُمثِّل الاقتران: $C(x) = 4000 + 0.25x^2$ تكلفة إنتاج x بدلة:

6 أجد اقتران الإيراد.

7 أجد اقتران الربح.

8 أجد عدد البدلات اللازم بيعها لتحقيق أكبر ربح مُمكِن، ثم أجد أكبر ربح مُمكِن.

9 أجد سعر البدلة الواحدة الذي يُحقِّق أكبر ربح مُمكِن.

10 أرادت إحدى الشركات أنْ تصنع خزّانات من الفولاذ الرقيق المُقاوِم للصدأ على شكل متوازي مستطيلات، بحيث يكون كلٌّ منها مفتوحًا من الأعلى، وحجمه 500 m^3، وقاعدته مربعة الشكل. أجد الأبعاد التي تجعل مساحة سطح الخزّان أقل ما يُمكِن.

الاشتقاق الضمني والمُعدَّلات المرتبطة
Implicit Differentiation and Related Rates

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

1. $x^2 + 5y^2 = 14$
2. $x^2 + 2xy = 3y^2$
3. $y \ln x = 1 + x$
4. $y + y^3 = \sin x - x^2$
5. $xe^y - 3x = 15$
6. $x^3 + xy^2 = 5x$

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

7. $x^2 y - 2x^3 - y^3 + 1 = 0, (2, -3)$
8. $y^3 - x^2 = 4, (2, 2)$

إذا كان: $y^2 - x^2 = 16$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

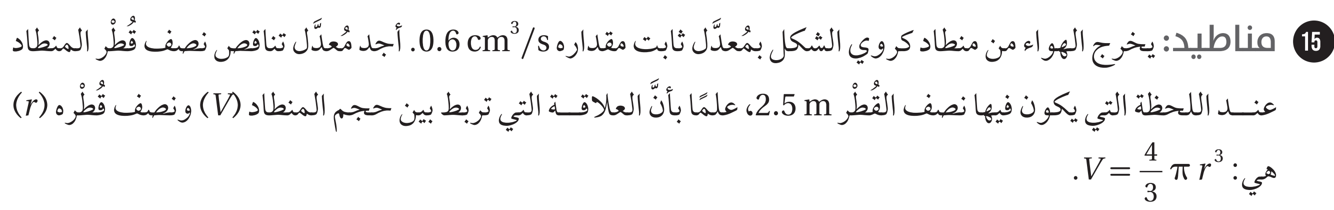
9. ميل المماس عند النقطة $(3, 5)$.
10. معادلة المماس عند النقطة $(3, 5)$.

إذا كان: $x^2 y = 8 - 4y$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

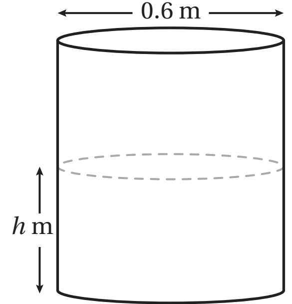
11. ميل المماس عند النقطة $(2, 1)$.
12. معادلة المماس عند النقطة $(2, 1)$.

إذا كان: $x^2 + 4xy + y^2 = 25$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

13. ميل المماس عند النقطة $(0, 5)$.
14. معادلة المماس عند النقطة $(0, 5)$.



15. **مناطيد:** يخرج الهواء من منطاد كروي الشكل بمُعدَّل ثابت مقداره $0.6 \text{ cm}^3/\text{s}$. أجد مُعدَّل تناقص نصف قُطْر المنطاد عند اللحظة التي يكون فيها نصف القُطْر 2.5 m، علمًا بأنَّ العلاقة التي تربط بين حجم المنطاد (V) ونصف قُطْره (r) هي: $V = \frac{4}{3} \pi r^3$.



16. **خزّانات مياه:** يُبيِّن الشكل المجاور خزّان ماء أسطواني الشكل. إذا كانت كمِّية الماء في الخزّان تزداد بمُعدَّل $0.4 \text{ m}^3/\text{s}$، فأجد مُعدَّل تغيُّر عمق الماء فيه (h)، علمًا بأنَّ العلاقة التي تربط بين حجم الخزّان (V) وارتفاعه (h) هي: $V = \pi r^2 h$.